Varianta 096

Subiectul I

a) $5\sqrt{3}$. b) 3. c) x-2y+4=0. d) 1. e) 4. f) 0.

Subiectul II

1. a) 45. b) $\frac{3}{5}$. c) $\hat{0}$. d) 0. e) $(x+2)(x^2+1)=0$, cu solutia reala $x_1=-2$.

2. a) f'(x)=cosx, x$\in$ **R**. b) $\int_0^{\pi} f(x)dx$ = - cos x$\Big|_0^{\pi}$ =2. c) f''(x)= - sinx, pentru x$\in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

f''(x)<0, deci f este concavă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

d) f'(0) =1. e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos n}{n}=0$.

Subiectul III

a) det L=0, rang L=1.

b) $I^2=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$=I, deci I$\in$ U.

$L^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$=L, deci L$\in$ U.

c) $\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall a\in \mathbf{R}$, deci $\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in$ U.

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$, $\forall b\in \mathbf{R}$, deci $\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\in$ U.

d) Pentru B$\in$ U, notăm P(n):B^n=B, pentru orice n natural nenul. P(1) este evident adevărată. Considerăm P(k) adevărată şi avem $B^{k+1}=B^k\cdot B=B\cdot B=B^2=B$, deci P(k+1) adevărată. Conform principiului inducției matematice P(n) este adevărată pentru orice n număr natural nenul.

e) Dacă A$\in$ U atunci A^2=A şi deci $a^2+bc=a$, b(a+d)=b, c(a+d)=c, $bc+d^2=d$. Scăzând prima şi ultima egalitate obținem $a^2-d^2=a-d$, deci (a-d)(a+d)=a-d. Pentru a$\neq$d obținem a+d=1 iar pentru a=d, înlocuind în egalități pentru b=0 avem a=0 sau a=1, iar dacă b$\neq$0 avem a=$\frac{1}{2}$.

Deoarece a=d obtinem a+d = 0 sau a+d =2 sau a+d =1.

f) De exemplu M=$\begin{pmatrix}\sqrt{1} & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$=L+A+B, din b) avem L$\in$ U, iar din c) A, B$\in$ U.

g) Tr K =1+$\sqrt{3}$, Fie $X_1, X_2,\ldots,X_n\in$ U, n$\in \mathbf{N}^*$, astfel încât $K=X_1+\ldots+X_n$ .Atunci $Tr(X_1+X_2+\ldots+X_n)=Tr(X_1)+Tr(X_2)+\ldots+Tr(X_n)\in \mathbf{N}$, conform punctului e), deci K nu se poate scrie ca o sumă finită de matrici din U.

Subiectul IV

a) g'(x)= $-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-...-\frac{1}{(x-2006)^2}, \forall x\in A$.

b) g'(x)=- $\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+...+\frac{1}{(x-2006)^2}\right]<0, \forall x\in A$.

c)

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(x-2)\cdot...\cdot(x-2006)+(x-1)\cdot(x-3)\cdot...\cdot(x-2006)+(x-1)...(x-2005)}{(x-1)(x-2)...(x-2006)}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+...+\frac{1}{x-2006}=g(x), \forall x\in A.$$

d) Din c) obținem f'(x)=f(x)·g(x), deci f''(x)=f'(x)·g(x)+ f(x)·g'(x)=

f'(x)· $\frac{f'(x)}{f(x)}+f(x)\cdot g'(x)$. Deci f''(x)·f(x)=(f'(x))^2+f^2(x)·g'(x)<(f'(x))^2 deoarece din b) avem g'(x)<0, pentru orice x din A.

e) Pentru a ∈ {1, 2,…,2006} avem $\lim_{\substack{x\to a\\ z<a}} g(x)=-\infty$ respectiv $\lim_{\substack{x\to a\\ z>a}} g(x)=\infty$ deci graficul lui f cu 2006 asimptote verticale.

f) Pentru a,b >2006, g continuă pe [a,b], deci integrabilă pe [a,b] şi folosind c)

avem $\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|\Big|_a^b$ =ln|f(b)|-ln|f(a)|

respectiv $\int_a^b g(x+1)dx=\int_{a+1}^{b+1} g(t)dt=\int_{a+1}^{b+1}\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln\left|f(t)\right|\Big|_{a+1}^{b+1}$ =ln|f(b+1)|-ln|f(a+1)|.

I= $\int(g(x+1)-g(x))dx$ =ln|f(2009)|- ln|f(2008)|- ln|f(2008)|+ ln|f(2007)|.

Pentru x ≥ 2007 avem f(x) ≥ 0 deci

I=ln $\frac{f(2009)\cdot f(2007)}{f^2(2008)}$ =ln $\frac{3\cdot4\cdot...\cdot2008\cdot1\cdot2\cdot...\cdot2006}{(2\cdot3\cdot...\cdot2007)^2}=\ln\frac{2008!\cdot2006!}{2\cdot(2007!)^2}=$

$\ln\frac{2008}{2\cdot2007}=\ln\frac{1004}{2007}$.

g) Pentru a=0 ecuația devine f(x)=0 şi are 2006 soluții reale şi distincte: 1, 2, …,2006;

Pentru a≠0 ecuația devine $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{a}$, deci $g(x)=\frac{1}{a}$.

Pentru a>0 avem 2006 soluții distincte situate în intervalele (1,2), (2,3),…,(2005,2006), (2006, ∞), iar pentru a<0 avem 2006 soluții distincte situate în (-∞,1), (1,2),…,(2005,2006).